View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk brought to you by CORE

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, №1 (2018), с. 92–101
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 1 (2018), pp. 92–101

©Куликов А. Н., Куликов Д.А., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-92-101

УДК 517.9

Уравнение Курамото–Сивашинского. Локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми периодическими решениями

Куликов А. Н.[1], **Куликов Д.А.**[2]

получена 15 ноября 2017

Аннотация. Рассмотрена периодическая краевая задача для одной из первоначальных редакций широко известного в математической физике уравнения Курамото–Сивашинского. Изучены локальные бифуркации в окрестности пространственно однородных состояний равновесия при смене ими устойчивости. Показано, что потеря устойчивости однородными состояниями равновесия приводит к появлению двумерного локального аттрактора, все решения на котором, кроме одного пространственно неоднородного состояния, – периодические функции времени. Спектр частот данного семейства периодических решений заполняет всю числовую ось, и все они неустойчивы в смысле определения А.М. Ляпунова в метрике фазового пространства (пространства начальных условий) соответствующей начально-краевой задачи. В качестве фазового пространства был выбран естественный для данной краевой задачи вариант функционального пространства Соболева. Для периодических решений, заполняющих двумерный аттрактор, приведены асимптотические формулы. При анализе бифуркационной задачи были использованы методы анализа бесконечномерных динамических систем: метод интегральных (инвариантных) многообразий в сочетании с аппаратом теории нормальных форм Пуанкаре, а также асимптотические методы. При этом анализ бифуркаций для периодической краевой задачи был сведен к анализу структуры окрестности нулевого решения однородной краевой задачи Дирихле для рассматриваемого в работе уравнения.

Ключевые слова: уравнение Курамото–Сивашинского, периодическая краевая задача, локальные бифуркации, устойчивость, аттрактор, асимптотические формулы

Для цитирования: Куликов А. Н., Куликов Д.А., "Уравнение Курамото–Сивашинского. Локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми периодическими решениями", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 92–101.

Об авторах:
Куликов Анатолий Николаевич, orcid.org/0000-0003-0251-9562, канд. ф.-м. наук, доцент
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич, orcid.org/0000-0002-6307-0941, канд. ф.-м. наук, доцент
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.10160.2017/5.1.
[2]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.

Введение

В работе рассмотрена одна из наиболее традиционных версий уравнения Курамото–Сивашинского (УКС) [1–3]. Для этого уравнения изучается периодическая краевая задача (КЗ). Этой задаче было посвящено достаточно большое число исследований [4–10]. Рассматривался вопрос о локальных бифуркациях. Большинство таких работ опиралось на использование редукции КЗ к конечномерной динамической системе. Как правило, для такой редукции использовался один из вариантов метода Галеркина (см., например, [5]). Далее анализу подвергалась полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений, и для нее изучались локальные бифуркации. Как правило, результатом такого анализа было выявление условий, при реализации которых имеют место либо бифуркации Андронова–Хопфа, либо Тьюринга–Пригожина, т.е. выявлялись условия, при которых у конечномерной динамической системы могут быть найдены циклы или пространственно неоднородные решения.

Анализ данной задачи, но без использования метода Галеркина или других методов редукции задачи к ее конечномерному аналогу выявил возможность бифуркации двумерного локального аттрактора, решения на котором – периодические функции времени, и все эти решения в силу классического определения А.М. Ляпунова неустойчивы. Данные результаты получены на основе применения строго математически обоснованных методов анализа бесконечномерных динамических систем. Возможность такой бифуркации отмечалась и ранее, при изучении иных динамических систем [11–12]. Результаты, изложенные ниже, составили основу доклада авторов на конференции “Новые тенденции в нелинейной динамике”, проходившей 5–7 октября 2017 г. [13].

1. Постановка математической задачи

Рассмотрим периодическую КЗ

$$w_\tau + \alpha w_{\xi\xi\xi\xi} + \beta w_{\xi\xi} + 2\gamma w w_\xi = 0, \tag{1}$$

$$w(\tau, \xi + 2H) = w(\tau, \xi), \tag{2}$$

где $\alpha > 0, H > 0, \beta, \gamma >\in R$. Дифференциальное уравнение в частных производных (1) принято называть уравнением Курамото–Сивашинского (см., например, [1–3]). Замены

$$\xi = \frac{xH}{\pi},\ \tau = \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{H}{\pi}\Big)^4 t,\ w = \Big(\frac{\alpha}{\gamma}\Big(\frac{\pi}{H}\Big)^3\Big)u$$

позволяют переписать КЗ в нормированном виде, сократив число параметров в уравнении. Далее в работе будет изучаться КЗ

$$u_t + u_{xxxx} + b u_{xx} + (u^2)_x = 0, \tag{3}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{4}$$

где $b = \dfrac{\beta}{\alpha}\Big(\dfrac{H}{\pi}\Big)^2$. В записи уравнения учтено, что $(u^2)_x = 2uu_x$.

Отметим некоторые свойства, характерные для решений КЗ (3), (4).

Во-первых, $u(t,x) = const$ является ее решением. Во-вторых, если $u(t,x)$ – ее решение, то

$$M_0(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)dx = c\,(c \in R).$$

Действительно, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_{xxx}dx = 0,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_{xx}dx = 0,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_x^2dx = 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_t dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} udx = 0,\ \text{т.е. } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} udx = c.$$

Положим в КЗ (3), (4)

$$u(t,x) = c + v(t,x),\ c \in R,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(t,x)dx = 0.$$

В результате последней замены КЗ (3), (4) можно свести к вспомогательной КЗ

$$v_t = Av - (v^2)_x, \tag{5}$$

$$v(t, x+2\pi) = v(t,x),\ M_0(v) = 0. \tag{6}$$

В КЗ (5), (6) линейный дифференциальный оператор (ЛДО) $A = A(c)$ определен равенством

$$A(c)v = -v_{xxxx} - bv_{xx} - 2cv_x$$

и зависит от параметра $c \in R$. Подчеркнем, что величина c произвольна. ЛДО $A(c)$, определенный на достаточно гладких функциях $p(x)$, удовлетворяющих условиям (6), является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $H_0 : f(x) \in H_0$, если

$$1)\, f(x+2\pi) = f(x),\ 2)\, f(x) \in L_2(-\pi,\pi),\ 3)\, M_0(f) = 0.$$

Далее, через H_k будем обозначать гильбертово пространство, состоящее из тех 2π периодических функций $f(x)$, у которых существуют обобщенные производные до порядка k включительно, принадлежащие $L_2(-\pi,\pi)$. Норму в H_k можно определить равенством

$$||f||^2_{H_k} = ||f||^2_{L_2} + ||f'||^2_{L_2} + \ldots + ||f^{(k)}||^2_{L_2},\ ||f||^2_{L_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Наконец, $H_{k,0} \subset H_k$ и состоит из тех $f(x) \in H_k$, для которых $M_0(f) = 0$. Если теперь КЗ (3), (4) дополнить начальным условием

$$u(0,x) = f(x) \in H_{4,0}, \tag{7}$$

то смешанная (начально краевая) задача (5), (6), (7) локально корректно разрешима и ее решения формируют локальный полупоток

$$f(x) \to f_t(x) \to u(t,x) \in H_{4,0} \text{ при любом } t > 0.$$

Отметим, что КЗ (5), (6) имеет нулевое состояние равновесия. В частности, в работе будут рассмотрены вопросы о поведении решений при $t \to \infty$ вспомогательной КЗ (5), (6) с начальными условиями $f(x) \in Q(r) \subset H_{4,0}$. Здесь через $Q(r)$ обозначен шар радиуса r с центром в нуле фазового пространства решений КЗ (5), (6), т.е. шар с центром в нуле гильбертова пространства $H_{4,0}$.

2. Линеаризованная краевая задача

В этом разделе рассмотрим линеаризованный вариант КЗ (5), (6), т.е. КЗ

$$v_t = Av, \;\; v = v(t,x), \tag{8}$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t,x), \;\; M_0(v) = 0, \tag{9}$$

где ЛДО $A = A(c)$ был определен в предыдущем разделе.

Стандартным образом можно проверить, что КЗ

$$-p^{(IV)} - bp'' - 2cp' = \lambda p, \, p(x + 2\pi) = p(x), \, M_0(p) = 0$$

имеет нетривиальные решения

$$p(x) = p_n(x) = \exp(inx), \, n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

если $\lambda_n = \lambda_n(c) = -n^4 + bn^2 + i\sigma n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$, а $\sigma = -2c$.

Подчеркнем, что $\tau_n = Re\lambda_n(c) = -n^4 + bn^2$ и не зависит от c. В нашем случае c играет роль параметра и от c зависит только $Im\lambda_n(c)$. Отметим, также, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = -\infty$. Семейство собственных функций рассматриваемого ЛДО $\exp(inx)$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ формирует полную ортогональную систему в сепарабельном гильбертовом пространстве H_0. Из этих замечаний вытекает справедливость утверждения.

Лемма. *Решения КЗ (8), (9) асимптотически устойчивы, если $b < 1$, и неустойчивы при $b > 1$. Если $b = 1$, то они устойчивы.*

При $b < 1$ асимптотически устойчиво нулевое решение нелинейной КЗ (5), (6), и оно неустойчиво при $b > 1$. При $b = 1$ реализуется критический случай об устойчивости нулевого решения КЗ. При таком выборе b $\lambda_\pm(c) = \pm i\sigma, \sigma = -2c$. Этой паре собственных значений соответствуют собственные функции $\exp(\pm ix)$. Для остальных собственных значений ЛДО $A(c)$ справедливы неравенства $\mathrm{Re}\,\lambda_n(c) \le -12$, $n = \pm 2, \pm 3, \dots$.

3. Основной результат

Рассмотрим нелинейный КЗ (3), (4) и (5), (6) при $b = 1 + \gamma\varepsilon$. В данном разделе удобно считать, что $\gamma = \dfrac{1}{12}$. Такой выбор постоянной γ мотивирован удобством при формулировке основного результата.

Теорема 1. *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ КЗ (5), (6) при любом $c \in R$ имеет единственный устойчивый предельный цикл $l(c, \varepsilon)$, принадлежащий достаточно малой окрестности $Q(r)$. При этом все решения с достаточно малыми начальными условиями со скоростью экспоненты приближаются к $l(c, \varepsilon)$ в смысле нормы фазового пространства. Для решений, формирующих такой цикл, справедлива асимптотическая формула*

$$v_p(t, x, c, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sin(x + \sigma t + \varphi_0) - \\ -\frac{\varepsilon}{12} \sin(2x + 2\sigma t + 2\varphi_0) + \frac{\varepsilon^{3/2}}{288} \sin(3x + 3\sigma t + 3\varphi_0) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{10}$$

где $\sigma = -2c, \varphi_0 \in R$.

При $c = 0$ получаем не цикл, а одномерное инвариантное многообразие, заполненное пространственно неоднородными состояниями равновесия КЗ (5), (6). В ситуации общего положения ($c \neq 0$) реализуется бифуркационная теорема Андронова–Хопфа. Особенностью анализа КЗ (5), (6) является зависимость уравнения (5) от параметра c. Она имеет цикл при любом $c \neq 0$, и от c зависит только период $T = T(c) = \frac{\pi}{|c|}$. Доказательство теоремы 1 достаточно стандартно. Детальных пояснений требует вывод формулы (10), а также уже отмеченный факт о характере зависимости от параметра c. Это будет сделано в следующем разделе (т.е. в п. 4).

Очевидно, что равенство

$$u_p(t, x, c, \varphi_0, \varepsilon) = c + v_p(t, x, c, \varphi_0, \varepsilon) \tag{11}$$

определяет двупараметрическое семейство периодических решений основной КЗ (3), (4), если $b = 1 + \frac{\varepsilon}{12}$. Двупараметрическое семейство решений (11) формирует двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon)$, которое с геометрической точки зрения является прямым произведением цикла $l(c, \varepsilon)$ и прямой. Все остальные решения из малой его окрестности приближаются к $V_2(\varepsilon)$ со скоростью экспоненты, показатель которой не зависит от c (напомним, что $Re\lambda_n(c)$ не зависит от c). Итак, $V_2(\varepsilon)$ – локальный аттрактор для решений КЗ (3), (4).

С другой стороны, все решения $u_p(t, x, c, \varepsilon) \in V_2(\varepsilon)$ индивидуально неустойчивы в норме пространства H_4. Действительно, рассмотрим два различных решения из семейства периодических решений (11), т.е. $u_p(t, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon)$ и $u_p(t, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon)$ ($c_1 \neq c_2$) и выделим "главные" части в асимптотическом представлении для этих двух решений

$$u_p(t, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) = w_p(t, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) + o(\varepsilon),\ u_p(t, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon) = w_p(t, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon) + o(\varepsilon),$$
$$w_1(t, x) = w_p(t, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) = c_1 + \varepsilon^{1/2} \sin(x + \sigma_1 t + \varphi_1),\ \sigma_1 = -2c_1,$$
$$w_2(t, x) = w_p(t, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon) = c_2 + \varepsilon^{1/2} \sin(x + \sigma_2 t + \varphi_2),\ \sigma_2 = -2c_2.$$

Положим $\Delta w = w_1 - w_2$. Тогда

$$||\Delta w||^2_{H_4} = ||\Delta w||^2_{L_2} + ||(\Delta w)_x||^2_{L_2} + ||(\Delta w)_{xx}||^2_{L_2} + ||(\Delta w)_{xxx}||^2_{L_2} + ||(\Delta w)_{xxxx}||^2_{L_2}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$||\Delta w||^2_{L_2} = 2\pi(c_1 - c_2)^2 + 4\varepsilon\pi \sin^2(\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)t + \varphi_2 - \varphi_1}{2}).$$

Для остальных слагаемых вычисления аналогичны, т.е. в результате получаем, что

$$||\Delta w||^2_{H_4} = 2\pi(c_1 - c_2)^2 + 20\varepsilon\pi\sin^2((c_2 - c_1)t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}).$$

Без нарушения общности будем считать, что $c_2 > c_1$ $(c_2 - c_1 > 0)$. Положим

$$t_k = \frac{(\frac{\pi}{2} + \pi k - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})}{c_2 - c_1}, \ \lim_{k\to\infty} t_k = \infty.$$

При так выбранных t_k справедливо неравенство

$$||\Delta w||^2_{H_4} \geq 20\varepsilon\pi \,\text{или}\, ||w||_{H_4} \geq 2\sqrt{5\pi\varepsilon}.$$

Следовательно, при достаточно малых ε $(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0))$ справедливо неравенство

$$||u_p(t_k, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) - u_p(t_k, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon)||_{H_4} \geq 2\sqrt{5\pi\varepsilon}.$$

С другой стороны, при достаточно малых $\Delta c = c_2 - c_1$ и $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$$||u_p(t_k, x, c_1, \varphi_1, \varepsilon) - u_p(t_k, x, c_2, \varphi_2, \varepsilon)||_{H_4} < \delta,$$

где δ – сколь угодно малая положительная постоянная. Последнее замечание доказывает, что любое решение из семейства (11) неустойчиво.

4. Вспомогательная краевая задача

В данном разделе рассмотрим еще одну вспомогательную КЗ

$$w_t = B(\varepsilon)w - (w^2)_y, \ w = w(t, y), \tag{12}$$

$$w(t, 0) = w(t, \pi) = w_{yy}(t, 0) = w_{yy}(t, \pi) = 0, \tag{13}$$

которая представляет и самостоятельный интерес. Здесь $y \in [0, \pi]$, ЛДО $B(\varepsilon)g(y) = -g^{(IV)}(y) - (1 + \frac{\varepsilon}{12})g''(y)$, область определения которого содержит достаточно гладкие функции $g(y)$, удовлетворяющие краевым условиям

$$g(0) = g(\pi) = g''(0) = g''(\pi) = 0.$$

Спектр ЛДО $B(\varepsilon)$ состоит из счетного набора собственных значений $\lambda_n(\varepsilon) = -n^4 + (1 + \frac{\varepsilon}{12})n^2$, которым соответствуют собственные функции $e_n(y) = \sin ny$. Все собственные числа данного ЛДО действительны и однократны. В частности, $\lambda_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{12}$, т.е. $\lambda_1(0) = 0$. Нелинейная КЗ (12), (13) имеет нулевое состояние равновесия, для которого реализуется случай, близкий к критическому простого нулевого собственного значения. В окрестности нулевого решения КЗ (12), (13) существует одномерное инвариантное многообразие $M_1(\varepsilon)$. Остальные решения из достаточно малой окрестности нулевого решения КЗ (12), (13) приближаются к $M_1(\varepsilon)$ с течением времени со скоростью экспоненты. Динамику решений на $M_1(\varepsilon)$ определяет скалярное уравнение первого порядка (нормальная форма – НФ)

$$\dot{z} = \varepsilon\Psi(z,\varepsilon) = \varepsilon\psi(z) + o(\varepsilon),\ z = z(t). \tag{14}$$

Решения на $M_1(\varepsilon)$ можно и целесообразно искать в следующем виде:

$$w(t,y,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}w_1(z,y) + \varepsilon w_2(z,y) + \varepsilon^{3/2}w_3(z,y) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{15}$$

где $z = z(t)$ решения НФ (14), $w_1(z,y) = z\sin y$, а функции $w_k(y,z), k = 2,3,4,\ldots$ принадлежат следующему классу функций: $f(z,y) \in W$, если

1) при фиксированном z функция $f(z,y) \in W_2^4[0,\pi]$;

2) имеет непрерывные частные производные относительно z и $f_k(0,y) = 0$;

3) удовлетворяет краевым условиям шарнирного опирания (13);

4) справедливы равенства $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(z,y)\sin y dy = 0$.

После подстановки суммы (15) в КЗ (12), (13) и приравнивания членов при одинаковых степенях ε $(\varepsilon, \varepsilon^{3/2}, \ldots)$ получаем неоднородные КЗ для определения членов суммы (15)

$$B_0w_2 = \Phi_2(z,y),\ w_2(z,0) = w_2(z,\pi) = w_{2yy}(z,0) = w_{2yyy}(z,\pi) = 0, \tag{16}$$

$$B_0w_3 = \Phi_3(z,y),\ w_3(z,0) = w_3(z,\pi) = w_{3yy}(z,0) = w_{3yyy}(z,\pi) = 0, \tag{17}$$

где ЛДО $B_0w_k = -w_{yyyy} - w_{yy}, k = 2,3$. Производные $z(t)$ следует вычислять в силу уравнения (14), т.е. НФ. Поэтому

$$\Phi_2(z,y) = 2(w_1^2)_y = z^2\sin 2y,\ \Phi_3(z,y) = 2(w_1w_2)_y + \frac{1}{12}(w_1)_{yy} + \psi(z)\sin y.$$

Анализ разрешимости КЗ (16), (17) показал, что

$$w_2 = -\frac{1}{12}z^2\sin 2y,\ w_3 = \frac{1}{288}z^3\sin 3y,\ \psi(z) = \frac{1}{12}(z - z^3).$$

Рассмотрим теперь укороченный вариант НФ (14), т.е. обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = \frac{\varepsilon}{12}(z - z^3),$$

которое имеет три состояния равновесия: $S_0 : z = 0$; $S_+ : z = 1$; $S_- : z = -1$. При этом нулевое состояние равновесия S_0 неустойчиво, а нетривиальные состояния равновесия S_+ и S_- асимптотически устойчивы. Справедливо утверждение.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ КЗ (12), (13) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия*

$$S_+ : w_+(y,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\sin y - q_1\varepsilon\sin 2y + q_2\varepsilon^{3/2}\sin 3y + o(\varepsilon^{3/2}),$$
$$S_- : w_-(y,\varepsilon) = -\varepsilon^{1/2}\sin y - q_1\varepsilon\sin 2y - q_2\varepsilon^{3/2}\sin 3y + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $q_1 = \dfrac{1}{12}, q_2 = \dfrac{1}{288}$.

Отметим, что справедливо равенство

$$w_-(y,\varepsilon) = -w_+(\pi - y, \varepsilon),$$

т.е. с "физической" точки зрения мы имеем одно и то же состояние равновесия, но в иной системе координат. Поэтому далее речь пойдет о состоянии равновесия S_+.

Продолжим функцию $w_+(y,\varepsilon)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ по нечетности, а затем на всю числовую ось по периодичности с периодом 2π. Тогда вновь полученная функция $v_+(y,\varepsilon)$ будет состоянием равновесия краевой задачи

$$v_t + v_{yyyy} + (1 + \frac{1}{12}\varepsilon)v_{yy} + (v^2)_y = 0, \tag{18}$$

$$v(t, y + 2\pi) = v(t, y),\ M_0(v) = 0. \tag{19}$$

При проверке используется то обстоятельство, что уравнение (18) инвариантно для нечетных функций. Действительно, если $v(t,y)$ нечетная функция переменной y, то все слагаемые левой части уравнения (18) сохраняют это свойство.

Рассмотрим теперь семейство функций $v_p(t,x,c,\varepsilon) = v_+(x + \sigma t + \varphi_0, \varepsilon)$, где $\sigma = -2c$, которое является при каждом c и φ_0 периодическим решением вспомогательной КЗ (5), (6) с сохранением устойчивости состояния равновесия S_+ в следующем смысле: периодическое решение $v_p(t,x,c,\varepsilon)$ орбитально асимптотически устойчиво. Последний фрагмент данного раздела завершает доказательство справедливости формулы (10). Отметим также, что состояние равновесия $w_-(y,\varepsilon)$, конечно, приводит к тому же семейству периодических решений. Состояниям равновесия $v_+(y,\varepsilon)$ и $v_-(y,z)$ КЗ (18), (19) соответствуют разные представители семейства периодических решений (10). Они отличаются величиной фазы.

В заключение отметим, что решение $v_p(t,x,c,\varepsilon)$ имеет период $T = 2\pi/|c|$, если $c \neq 0$ и величина T принимает любое значение из R_+.

Список литературы / References

[1] Kuramoto Y., *Chemical oscillations, waves and turbulence*, Springer, Berlin, 1984.

[2] Sivashinsky G. I., “Weak turbulence in periodic flows”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **17**:2 (1985), 243–255.

[3] Ахмедиев Н., А. Анкевич, *Диссипативные солитоны*, Физматлит, Москва, 2008.

[4] Armbruster D., Guckenheimer J., Holmes P., “Kuramoto–Sivashinsky Dynamics on the Center–Unstable Manifold”, *SIAM J. Appl. Math.*, **49**:3 (1989), 676–691.

[5] Kevrekidis I.G., Nicolaenko B., Scovel J.C., “Back in the saddle again: A computer assisted study of the Kuramoto–Sivashinsky equation”, *SIAM J. Appl. Math.*, **50**:3 (1990), 760–790.

[6] Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R., “Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **16**:2 (1985), 155–183.

[7] Changpin Li, Zhonghua Y., “Bifurcation of two-dimensional Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Appl. Math.- JCU*, **13**:3 (1998), 263–270.

[8] Куликов А. Н., Куликов Д. А., “Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **52**:5 (2012), 930–945; English transl.: Kulikov A. N, Kulikov D. A, “Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **52**:5 (2012), 800–814.

[9] Куликов А.Н., Куликов Д.А., “Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского”, *Вестник МИФИ*, **3**:4 (2014), 408–415; [Kulikov A.N., Kulikov D.A., “Bifurcations of spatially inhomogeneous solutions in two boundary value problems for the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Vestnik MIFI*, **3**:4 (2014), 408–415, (in Russian).]

[10] Kulikov A.N., Kulikov D.A., “Inhomogeneous solutions for a modified Kuramoto–Sivashinsky equation”, *Journal of Mathematical Sciences*, **219**:2 (2016), 173–183.

[11] Куликов А.Н., “Аттракторы двух краевых задач для модифицированного нелинейного телеграфного уравнения”, *Нелинейная динамика*, **4**:1 (2008), 57–68; [Kulikov A.N., “The attractors of two boundary value problems for a modifieded nonlinear telegraph equation”, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, **4**:1 (2008), 57–68, (in Russian).]

[12] Глызин С.Д., Колесов А.Ю., “Пример аттрактора, состоящего из неустойчивых по Ляпунову периодических траекторий”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **15**:2 (2008), 94–95; [Glyzin S.D., Kolesov A.Yu, “Primer attraktora, sostoyashchego iz neustoychivykh po Lyapunovu periodicheskikh traektoriy”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **15**:2 (2008), 94–95, (in Russian).]

[13] Куликов А.Н., Куликов Д.А., “Уравнение Курамото-Сивашинского. Существование аттрактора, все решения на котором неустойчивы”, *Тезисы докладов международной научной конференции "Новые тенденции в нелинейной динамике"*, ЯрГУ, Ярославль, 2017, 50–51; [Kulikov A.N., Kulikov D.A., “The existence of attractor formed by the unstable solutions”, *Abstracts of international conference reports ”New Trends in Nonlinear Dynamics”*, JarGU, Jaroslavl, 2017, 50–51, (in Russian).]

Kulikov A. N., Kulikov D. A., "The Kuramoto–Sivashinsky equation. A Local Attractor Filled with Unstable Periodic Solutions", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 92–101.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-92-101

Abstract. A periodic boundary value problem is considered for one version of the Kuramoto-Sivashinsky equation, which is widely known in mathematical physics. Local bifurcations in a neighborhood of the spatially homogeneous equilibrium points in the case when they change stability are studied. It is shown that the loss of stability of homogeneous equilibrium points leads to the appearance of a two-dimensional attractor on which all solutions are periodic functions of time, except one spatially inhomogeneous state. A spectrum of frequencies of the given family of periodic solutions fills the entire number line, and they are all unstable in a sense of Lyapunov definition in the metric of the phase space (space of initial conditions) of the corresponding initial boundary value problem. It is chosen the Sobolev space as the phase space. For the periodic solutions which fill the two-dimensional attractor, the asymptotic formulas are given. In order to analyze the bifurcation problem it was used analysis methods for infinite-dimensional dynamical systems: the integral (invariant) manifold method, the Poincare normal form theory, and asymptotic methods. The analysis of bifurcations for periodic boundary value problem was reduced to analysing the structure of the neighborhood of the zero solution of the homogeneous Dirichlet boundary value problem for the considered equation.

Keywords: the Kuramoto-Sivashinsky equation,periodic boundary value problem,local bifurcations, stability, attractor, asymptotic formulas

On the authors:
Anatoli N. Kulikov, orcid.org/0000-0003-0251-9562, PhD, associate professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: anat_kulikov@mail.ru

Dmitri A. Kulikov, orcid.org/0000-0002-6307-0941, PhD, associate professor
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Acknowledgments:
[1]This work was carried out within the framework of the state programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project № 1.10160.2017/5.1.
[2]The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-01-00672.